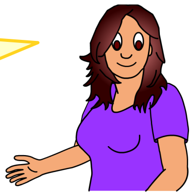
Die gezeigten Lösungen sind nur eine Variante – du kannst die Aufgaben auch anders lösen. Wichtig ist dabei nur, dass dein Ergebnis am Ende dem unserer Lösung entspricht. Dezimalstellen sind auf 1 Stelle gerundet.



Pflichtbereich

Pflichtbereich Aufgabe 1 (2 Punkte):

Eine nach oben geöffnete Normalparabel hat den Scheitelpunkt S (– 0,5|– 4).

Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse bzw. der y-Achse.

→ *Bestimme zuerst die Funktionsgleichung der Normalparabel. Berechne über die Lösungsformel die x-Koordinaten der Schnittpunkte. Berechne anschließend die y-Koordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse, indem du den x-Wert in die Parabelgleichung einsetzt.*

Bestimmung der Funktionsgleichung:

$y = (x - d)^2 + c \qquad | \; S(-0{,}5|-4) \rightarrow d = 0{,}5;\ c = -4$

$y = (x + 0{,}5)^2 - 4$

$y = x^2 + x + 0{,}25 - 4$

$y = x^2 + x - 3{,}75$

Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse:

$y = x^2 + x - 3{,}75 \qquad | \; y = 0$

$0 = x^2 + x - 3{,}75$

$x_{1|2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3{,}75}$

$x_{1|2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 + 3{,}75}$

$x_{1|2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 3{,}75}$

$x_{1|2} = -0{,}5 \pm \sqrt{4}$

$x_{1|2} = -0{,}5 \pm 2$

$x_1 = -0{,}5 + 2$

$x_1 = 1{,}5$

→ P_1 (1,5|0)

$x_2 = -0{,}5 - 2$

$x_2 = -2{,}5$

→ P_2 (- 2,5|0)

Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse:

$y = x^2 + x - 3{,}75 \qquad | \; x = 0$

$y = 0^2 + 0 - 3{,}75$

$y = -3{,}75$

→ P_3 (0|- 3,75)

Pflichtbereich Aufgabe 2 (2 Punkte):

Löse das Gleichungssystem:

$\frac{1}{3}x - 2y = -1$

$2x - y = 4x - 7$

→ *Forme beide Gleichungen so um, dass du sie addieren kannst. Berechne damit den y-Wert. Setze den y-Wert in die zweite Gleichung ein, um den x-Wert zu bestimmen.*

Berechnung von y:

(I) $\frac{1}{3}x - 2y = -1$

(II) $2x - y = 4x - 7 \qquad | -4x$

(I) $\frac{1}{3}x - 2y = -1 \qquad | \cdot 6$

(II) $2x - 4x - y = \cancel{4x - 4x} - 7$

(I) $(\frac{1}{3}x \cdot 6) - (2y \cdot 6) = -1 \cdot 6$

(II) $-2x - y = -7$

(I) $2x - 12y = -6$

(II) $-2x - y = -7$

(I) + (II)

(I) $2x - 12y = -6$

(II) $-2x - y = -7$

$\cancel{0x} - 13y = -13 \qquad | : (-13)$

$-13y : (-13) = -13 : (-13)$

$y = 1$

Berechnung von x:

y in (II)

$2x - y = 4x - 7 \qquad | \; y = 1$

$2x - 1 = 4x - 7 \qquad | - 4x$

$2x - 4x - 1 = \cancel{4x - 4x} - 7 \qquad | + 1$

$-2x \cancel{- 1 + 1} = -7 + 1$

$-2x = -6 \qquad | : (-2)$

$-2x : (-2) = -6 : (-2)$

$x = 3$

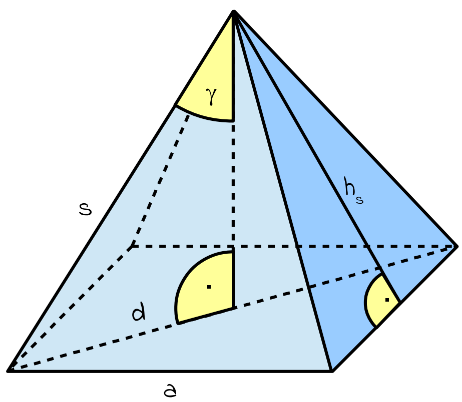
$\mathcal{L} = \{x = 3;\ y = 1\}$

Pflichtbereich Aufgabe 3 (2,5 Punkte):

Eine quadratische Pyramide hat die Maße a = 6,8 cm und γ = 37,0°.

Berechne die Oberfläche der Pyramide.

→ *Berechne die Diagonale. Über den Sinus γ und der Hälfte der Diagonalen kannst du die Seitenkante berechnen. Mittels Pythagoras berechnest du anschließend die Höhe der Seitenfläche. Zum Schluss kannst du die Oberfläche berechnen.*



Berechnung der Diagonale d:

$d = a \cdot \sqrt{2}$

$d = 6{,}8 \text{ cm} \cdot \sqrt{2}$

$d = 9{,}6 \text{ cm}$

Berechnung der Seitenkante s:

$\sin \gamma = \dfrac{\frac{d}{2}}{s} \qquad | \cdot s$

$\sin \gamma \cdot s = \dfrac{\frac{d}{2}}{s} \cancel{\cdot s} \qquad | : \sin \gamma$

$\dfrac{\cancel{\sin \gamma} \cdot s}{\cancel{\sin \gamma}} = \dfrac{d}{2 \cdot \sin \gamma}$

$s = \dfrac{9{,}6 \text{ cm}}{2 \cdot \sin 37°}$

$s = \dfrac{9{,}6 \text{ cm}}{2 \cdot 0{,}6018}$

$s = \dfrac{9{,}6 \text{ cm}}{1{,}2}$

$s = 8 \text{ cm}$

Berechnung der Seitenflächenhöhe h_s:

$h_s^2 + (\frac{a}{2})^2 = s^2 \qquad | - (\frac{a}{2})^2$

$h_s^2 \cancel{+ (\frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2})^2} = s^2 - (\frac{a}{2})^2$

$h_s^2 = s^2 - (\frac{a}{2})^2 \qquad | \sqrt{}$

$h_s = \sqrt{s^2 - (\frac{a}{2})^2}$

$h_s = \sqrt{(8\text{ cm})^2 - (\frac{6{,}8\text{ cm}}{2})^2}$

$h_s = \sqrt{(8\text{ cm})^2 - (3{,}4\text{ cm})^2}$

$h_s = \sqrt{64\text{ cm}^2 - 11{,}56\text{ cm}^2}$

$h_s = \sqrt{52{,}44\text{ cm}^2}$

$h_s = 7{,}2\text{ cm}$

Berechnung der Oberfläche O:

$O = a \cdot (a + 2 \cdot h_s)$

$O = 6{,}8\text{ cm} \cdot (6{,}8\text{ cm} + 2 \cdot 7{,}2\text{ cm})$

$O = 6{,}8\text{ cm} \cdot (6{,}8\text{ cm} + 14{,}4\text{ cm})$

$O = 6{,}8\text{ cm} \cdot 21{,}2\text{ cm}$

$O = \mathbf{144{,}2\text{ cm}^2}$

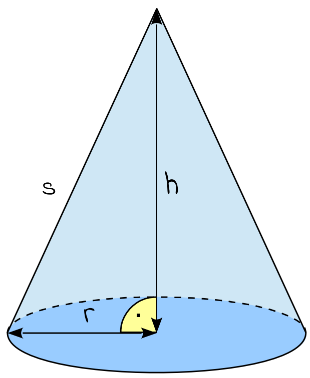
Pflichtbereich Aufgabe 4 (2 Punkte):

Eine Kugel hat das Volumen $V = 589\text{ cm}^3$. Ihr Radius ist gleich groß wie der Grundkreisradius eines volumengleichen Kegels.

Berechne die Mantelfläche des Kegels.

→ *Berechne aus dem Kugelvolumen den Radius. Das Volumen des Kegels entspricht dem des Kegels. Über die Formel des Kegelvolumens kannst du die Höhe des Kegels berechnen. Mittels Pythagoras kannst du die Seitenlinie bestimmen. Anschließend kannst du die Mantelfläche berechnen.*

Berechnung des Radius r:



$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ | $\cdot 3$

$V_{Kugel} \cdot 3 = \frac{4}{\cancel{3}} \cancel{\cdot 3}\, \pi \cdot r^3$ | $: 4$

$\frac{V_{Kugel} \cdot 3}{4} = \cancel{4 : 4} \cdot \pi \cdot r^3$ | $: \pi$

$\frac{V_{Kugel} \cdot 3}{4 \cdot \pi} = \cancel{\pi : \pi} \cdot r^3$

$r^3 = \frac{V_{Kugel} \cdot 3}{4 \cdot \pi}$ | $\sqrt[3]{\ }$

$r = \sqrt[3]{\frac{V_{Kugel} \cdot 3}{4 \cdot \pi}}$

$r = \sqrt[3]{\frac{589\ cm^3 \cdot 3}{4 \cdot \pi}}$

$r = \sqrt[3]{\frac{1.767\ cm^3}{4 \cdot \pi}}$

$r = \sqrt[3]{\frac{441{,}75\ cm^3}{\pi}}$

$r = \sqrt[3]{140{,}61\ cm^3}$

$r = 5{,}2\ cm$

Berechnung der Höhe h:

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$ | $\cdot 3$

$V \cdot 3 = \frac{1}{\cancel{3}} \cancel{\cdot 3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ | $: \pi$

$\frac{V \cdot 3}{\pi} = \cancel{\pi : \pi} \cdot r^2 \cdot h$ | $: r^2$

$\frac{V \cdot 3}{\pi \cdot r^2} = \cancel{r^2 : r^2} \cdot h$

$h = \frac{V \cdot 3}{\pi \cdot r^2}$

$h = \frac{589\ cm^3 \cdot 3}{\pi \cdot (5{,}2\ cm)^2}$

$h = \frac{1.767\ cm^3}{\pi \cdot 27{,}04\ cm^2}$

$h = \frac{1.767\ cm^3}{84{,}95\ cm^2}$

$h = 20{,}8\ cm$

Berechnung der Seitenlinie s:

$s^2 = h^2 + r^2$ | $\sqrt{}$

$s = \sqrt{h^2 + r^2}$

$s = \sqrt{(20{,}8\ cm)^2 + (5{,}2\ cm)^2}$

$s = \sqrt{432{,}6\ cm^2 + 27{,}0\ cm^2}$

$s = \sqrt{459{,}6\ cm^2}$

$s = 21{,}4\ cm$

Berechnung der Mantelfläche M:

$M = \pi \cdot r \cdot s$

$M = \pi \cdot 5{,}2\ cm \cdot 21{,}4\ cm$

$M = \pi \cdot 111{,}3\ cm^2$

M = **$349{,}7\ cm^2$**

Pflichtbereich Aufgabe 5 (2,5 Punkte):

Die Entfernung der Punkte A und D kann aufgrund eines Hindernisses nicht direkt gemessen werden. Folgende Größen sind gegeben:

$\overline{BC} = 1.356\ cm$

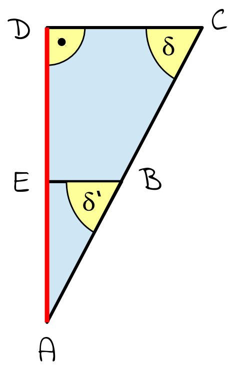
$\overline{BE} = 352\ cm$

$\delta = 65{,}0°$

Berechne die Länge $\overline{AD}$.

→ *Berechne zuerst über den Cosinus δ die Länge $\overline{AB}$. Der Winkel δ' entspricht dem δ (Stufenwinkel). Diese Länge ergibt mit der Länge $\overline{BC}$ die Länge $\overline{AC}$. Über den Sinus δ kannst du die Länge $\overline{AD}$ berechnen.*

Berechnung der Länge $\overline{AB}$:



δ' = δ (Stufenwinkel)

$\cos\delta' = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}$ | $\cdot\ \overline{AB}$

$\cos\delta' \cdot \overline{AB} = \frac{\overline{BE} \cdot \cancel{\overline{AB}}}{\cancel{\overline{AB}}}$ | : cos δ'

$\frac{\overline{AB} \cdot \cancel{\cos\delta'}}{\cancel{\cos\delta'}} = \frac{\overline{BE}}{\cos\delta'}$

$\overline{AB} = \frac{352\ cm}{\cos 65°}$

$\overline{AB} = 832{,}9\ cm$

Berechnung der Strecke $\overline{AC}$:

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

$\overline{AC} = 832{,}9\text{ cm} + 1.356\text{ cm}$

$\overline{AC} = 2.188{,}9\text{ cm}$

Berechnung der Strecke $\overline{AD}$:

$\sin\delta = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \qquad | \cdot \overline{AC}$

$\sin\delta \cdot \overline{AC} = \dfrac{\overline{AD} \cdot \cancel{\overline{AC}}}{\cancel{\overline{AC}}}$

$\overline{AD} = \sin\delta \cdot \overline{AC}$

$\overline{AD} = \sin 65° \cdot 2.188{,}9\text{ cm}$

$\overline{AD} = \mathbf{1.983{,}8\ cm}$

Pflichtbereich Aufgabe 6 (2,5 Punkte):

Vom Viereck ABCD sind bekannt:

$\overline{BC} = 4{,}0\text{ cm}$

$\overline{CD} = 6{,}3\text{ cm}$

$\alpha = 54{,}0°$

$\delta = 110{,}0°$

Berechne die Länge $\overline{DE}$.

→ *Berechne über den Pythagoras die Länge $\overline{BD}$. Über den Tangens kannst du den Teilwinkel δ_1 bestimmen. Mittels Winkelsumme aus dem Dreieck AED kannst du den Teilwinkel δ_3 errechnen. Die Differenz aus Winkel δ und den beiden Teilwinkel ergibt den dritten Teilwinkel δ_2. Über den Cosinus δ_2 kannst du die Länge $\overline{DE}$ berechnen.*

Berechnung von $\overline{BD}$:

$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 \qquad | \sqrt{\ }$

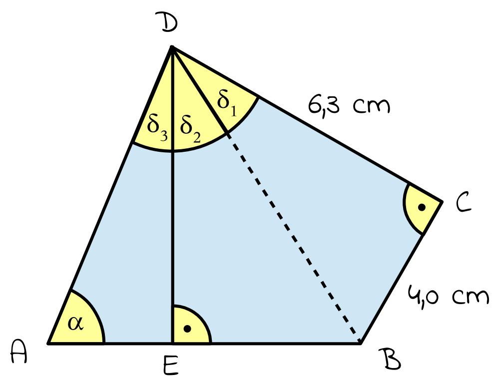
$\overline{BD} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CD}^2}$

$\overline{BD} = \sqrt{(4\text{ cm})^2 + (6{,}3\text{ cm})^2}$

$\overline{BD} = \sqrt{16\text{ cm}^2 + 39{,}7\text{ cm}^2}$

$\overline{BD} = \sqrt{55{,}7\text{ cm}^2}$

$\overline{BD} = 7{,}5\text{ cm}$



Berechnung von Winkel δ_1 :

$\tan \delta_1 = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$

$\tan \delta_1 = \frac{4{,}0 \text{ cm}}{6{,}3 \text{ cm}}$

$\tan \delta_1 = 0{,}6349$

$\delta_1 = 32{,}4°$

Berechnung von Winkel δ_3 (Winkel ADE):

$\delta_3 = 180° - (\alpha + 90°)$

$\delta_3 = 180° - (54° + 90°)$

$\delta_3 = 180° - 144°$

$\delta_3 = 36°$

Berechnung von Winkel δ_2 (Winkel EDB):

$\delta_2 = \delta - (\delta_1 + \delta_3)$

$\delta_2 = 110° - (32{,}4° + 36°)$

$\delta_2 = 110° - 68{,}4°$

$\delta_2 = 41{,}6°$

Berechnung von $\overline{DE}$:

$\cos \delta_2 = \frac{\overline{DE}}{\overline{BD}} \qquad | \cdot \overline{BD}$

$\cos \delta_2 \cdot \overline{BD} = \frac{\overline{DE}}{\cancel{\overline{BD}}} \cancel{\cdot \overline{BD}}$

$\overline{DE} = \cos \delta_2 \cdot \overline{BD}$

$\overline{DE} = \cos 41{,}6° \cdot 7{,}5 \text{ cm}$

$\overline{DE} = 0{,}7478 \cdot 7{,}5 \text{ cm}$

$\overline{DE} =$ ***5,6 cm***

Pflichtbereich Aufgabe 7 (1,5 Punkte):

Bei einer Radarkontrolle wurde bei 15 % aller Fahrzeuge eine Geschwindigkeitsüberschreitung festgestellt. 20 % dieser Geschwindigkeitsüberschreitung führen zu einem Fahrverbot; das waren 12 Fälle.

Wie viele Fahrzeuge wurden kontrolliert?

→ *Berechne zuerst den Prozentsatzes p für 12 Fahrzeuge. Berechne daraus mittels Dreisatz die Anzahl aller kontrollierten Fahrzeuge.*

Berechnung des Prozentsatzes p für 12 Fahrzeuge:

12 Fahrzeuge ≙ 20 % von 15 %

12 Fahrzeuge ≙ 20 % · 15 %

12 Fahrzeuge ≙ 3 %

Berechnung der Anzahl kontrollierter Fahrzeuge:

3 % ≙ 12 Fahrzeuge | : 3

3 % : 3 ≙ 12 Fahrzeuge : 3

1 % ≙ 4 Fahrzeuge | · 100

1 % · 100 ≙ 4 Fahrzeuge · 100

100 % ≙ **400 Fahrzeuge**

Pflichtbereich Aufgabe 8 (2 Punkte):

Ein Kapital von 24.000 € wird 5 Jahre lang angelegt, Zinsen werden mitverzinst.

Zinssatz im 1. Jahr: 3,0 %

Zinssatz im 2. Jahr: 3,5 %

Zinssatz im 3. Jahr: 4,5 %

Zinssatz im 4. Jahr: 6,0 %

Für das fünfte Jahr werden 2.125.55 € Zinsen gutgeschrieben.

a) Wie hoch ist der Zinssatz im fünften Jahr?

→ *Berechne zuerst das Kapitals K_4 nach vier Jahren. Aus dem Kapital und den Zinsen aus dem fünften Jahr kannst du das Kapital berechnen.*

Berechnung des Kapitals K_4 nach vier Jahren:

$K_4 = K_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot q_4$

$K_4 = 24.000\,€ \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}045 \cdot 1{,}06$

$K_4 = 24.720\,€ \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}045 \cdot 1{,}06$

$K_4 = 25.585{,}20\,€ \cdot 1{,}045 \cdot 1{,}06$

$K_4 = 26.736{,}53\,€ \cdot 1{,}06$

$K_4 = 28.340{,}73\,€$

Berechnung des Zinssatzes für das fünfte Jahr:

$Z = \frac{K_4 \cdot i \cdot p}{100}$ | · 100

$Z \cdot 100 = \frac{K_4 \cdot i \cdot p}{\cancel{100}} \cancel{\cdot 100}$ | : K

$$\frac{Z \cdot 100}{K_4} = \cancel{K : K} \cdot i \cdot p \qquad | : i$$

$$\frac{Z \cdot 100}{K_4 \cdot i} = \cancel{i : i} \cdot p$$

$$p = \frac{2.125{,}55 \text{ €} \cdot 100}{28.340{,}72 \text{ €} \cdot 1}$$

$$p = \frac{212.555 \text{ €}}{28.340{,}72 \text{ €}}$$

$$p = 7{,}5 \text{ \%}$$

b) Bei welchem jährlich gleichbleibenden Zinssatz hätte sich nach fünf Jahren das gleiche Endkapital ergeben?

→ *Aus dem Kapital des 4. Jahr und den Zinsen kannst du das Kapital nach 5 Jahren berechnen. Über die Zinseszinsformel kannst du den Zinssatz bestimmen.*

Berechnung von K_5:

$K_5 = K_4 + Z_5$

$K_5 = 28.340{,}73 \text{ €} + 2.125{,}55 \text{ €}$

$K_5 = 30.466{,}28 \text{ €}$

Berechnung des Zinssatzes für das fünfte Jahr:

$$K_5 = K_0 \cdot q^5 \qquad | : K_0$$

$$\frac{K_5}{K_0} = \cancel{K_0 : K_0} \cdot q^5$$

$$q^5 = \frac{K_5}{K_0} \qquad | \sqrt[5]{}$$

$$q = \sqrt[5]{\frac{K_5}{K_0}}$$

$$q = \sqrt[5]{\frac{30.466{,}28 \text{ €}}{24.000 \text{ €}}}$$

$$q = \sqrt[5]{1{,}2694}$$

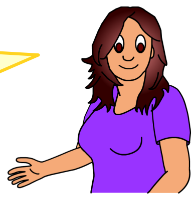
$$q = 1{,}049$$

→ $p =$ **4,9 %**

Fach Mathematik - Wahlbereich

Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung, elektronischer, nicht programmierbarer Taschenrechner sowie Parabelschablone und Zeichengeräte.

Hinweis:
Im Wahlbereich musst du zwei von drei Aufgaben bearbeiten. Hier kannst du maximal 16 Punkte erreichen.



Wahlbereich Aufgabe 1 (4,5 Punkte + 3,5 Punkte):

a) Von der regelmäßigen achtseitigen Pyramide sind bekannt:

Grundkante a = 6,4 cm

Körperhöhe h = 15,1 cm

Berechne die Oberfläche der Pyramide.

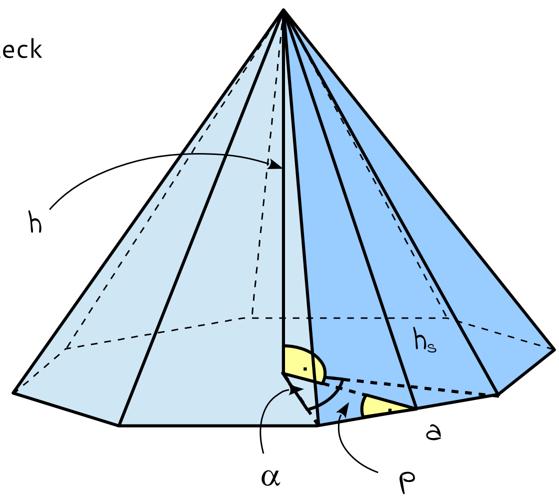
→ *Berechne zuerst den Winkel α. Über den Tangens kannst du Höhe des gleichseitigen Dreieck bestimmen. Berechne die Grundfläche (Achteck). Über den Pythagoras kannst du die Höhe der Seitenfläche berechnen. Anschließend kannst du den Mantel der Achteckpyramide berechnen. Aus der Grundfläche und dem Mantel kannst du die Oberfläche berechnen.*

Berechnung von $\frac{\alpha}{2}$:

$\alpha = \frac{360°}{n}$ | n = 8, da Achteck

$\alpha = \frac{360°}{8}$

$\alpha = 45°$



Berechnung der Höhe des gleichseitigen Dreiecks p:

$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{p}$ | · p

$\tan\frac{\alpha}{2} \cdot p = \frac{\frac{a}{2}}{\cancel{p}} \cdot \cancel{p}$ | : $\tan\frac{\alpha}{2}$

$\frac{\cancel{\tan\frac{\alpha}{2}} \cdot p}{\cancel{\tan\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{2 \cdot \tan\frac{\alpha}{2}}$

$p = \frac{a}{2 \cdot \tan \frac{\alpha}{2}}$

$p = \frac{6{,}4\ cm}{2 \cdot \tan 22{,}5°}$

$p = \frac{6{,}4\ cm}{2 \cdot 0{,}4142}$

$p = \frac{6{,}4\ cm}{0{,}8284}$

$p = 7{,}7\ cm$

Berechnung der Grundfläche $A_{Grundfläche}$:

$A_{Grundfläche} = A_{regelmäßiges\ Achteck}$

$A_{Grundfläche} = \frac{n \cdot a \cdot p}{2}$ | n = 8, da Achteck

$A_{Grundfläche} = \frac{8 \cdot 6{,}4\ cm \cdot 7{,}7\ cm}{2}$

$A_{Grundfläche} = \frac{51{,}2\ cm \cdot 7{,}7\ cm}{2}$

$A_{Grundfläche} = \frac{394{,}2\ cm^2}{2}$

$A_{Grundfläche} = 197{,}1\ cm^2$

Berechnung der Höhe der Seite h_s:

$h_s^2 = h^2 + p^2$ | $\sqrt{\ }$

$h_s = \sqrt{h^2 + p^2}$

$h_s = \sqrt{(15{,}1\ cm)^2 + (7{,}7\ cm)^2}$

$h_s = \sqrt{228\ cm^2 + 59{,}29\ cm^2}$

$h_s = \sqrt{287{,}29\ cm^2}$

$h_s = 16{,}9\ cm$

Berechnung des Mantels A_{Mantel}:

$A_{Mantel} = 8 \cdot A_{Seitendreieck}$

$A_{Mantel} = 8 \cdot (\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s)$

$A_{Mantel} = 8 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 6{,}4\ cm \cdot 16{,}9\ cm)$

$A_{Mantel} = 8 \cdot (\frac{1}{2} \cdot 108{,}2\ cm^2)$

$A_{Mantel} = 8 \cdot 54{,}1\ cm^2$

$A_{Mantel} = 432{,}8\ cm^2$

Berechnung der Oberfläche O:

$O = A_{Grundfläche} + A_{Mantel}$

$O = 197{,}1\ cm^2 + 432{,}8\ cm^2$

$O = \mathbf{629{,}9\ cm^2}$

b) Ein zusammengesetzter Körper besteht aus einem Kegelstumpf und einer Halbkugel. Es gilt:

$r_1 = 7e$

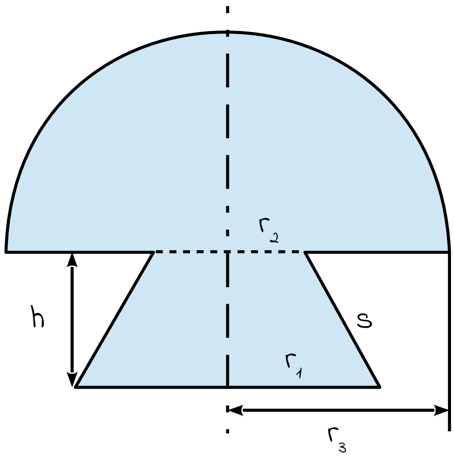
$r_2 = 4e$

$V_{Kegelstumpf} = 124\pi e^3$

$V_{Halbkugel} = 486\pi e^3$

Zeige ohne Verwendung gerundeter Werte, dass sich die Oberfläche des Körpers mit der Formel $O = 331\pi e^2$ berechnen lässt.

→ *Die Oberfläche des Körper setzt sich aus einer Kreisfläche, dem Mantel eines Kegelstumpfes, einem Kreisring und einer Halbkugel zusammen. Berechne zuerst die Fläche des Grundkreises. Berechne über das Volumen des Kegelstumpfes dessen Höhe. Berechne über den Pythagoras die Seitenlinie. Anschließend kannst du den Mantel des Kegelstumpfes bestimmen. Aus dem Volumen der Halbkugel kannst du deren Radius bestimmen. Mit dem Radius kannst du den Kreisring und die Oberfläche der Halbkugel berechnen. Addiere anschließend alle Oberflächen zur gesamten Oberfläche.*



Berechnung der Fläche des Grundkreises A_{Kreis}:

$A_{Kreis} = \pi r_1^2$

$A_{Kreis} = \pi(7e)^2$

$A_{Kreis} = 49\pi e^2$

Berechnung der Höhe h:

$$V_{Stumpf} = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2) \qquad | \cdot 3$$

$$V_{Stumpf} \cdot 3 = \frac{\pi}{\cancel{3}} \cancel{\cdot 3} \cdot h \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$$

$$V_{Stumpf} \cdot 3 = \pi \cdot h \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2) \qquad | : \pi$$

$$\frac{V_{Stumpf} \cdot 3}{\pi} = \cancel{\pi : \pi} \cdot h \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2) \quad | : (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$$

$$\frac{V_{Stumpf} \cdot 3}{\pi \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)} = \frac{h \cdot \cancel{(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)}}{\cancel{(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)}}$$

$$h = \frac{V_{Stumpf} \cdot 3}{\pi \cdot (r_1^{\,2} + r_1 \cdot r_2 + r_2^{\,2})}$$

$$h = \frac{124\pi e^3 \cdot 3}{\pi \cdot ((7e)^2 + 7e \cdot 4e + (4e)^2)}$$

$$h = \frac{372\pi e^3}{\pi \cdot (49e^2 + 28e^2 + 16e^2)}$$

$$h = \frac{372\pi e^3}{\pi \cdot 93e^2}$$

$$h = \frac{372\pi e^3}{93\pi e^2}$$

$$h = 4e$$

Berechnung der Seitenlinie s:

$$s^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2 \qquad | \sqrt{\ }$$

$$s = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$

$$s = \sqrt{(4e)^2 + (7e - 4e)^2}$$

$$s = \sqrt{(4e)^2 + (3e)^2}$$

$$s = \sqrt{16e^2 + 9e^2}$$

$$s = \sqrt{25e^2}$$

$$s = 5e$$

Berechnung des Kegelstumpfmantels $M_{Kegelstumpf}$:

$$M_{Kegelstumpf} = \pi \cdot s \cdot (r_1 + r_2)$$

$$M_{Kegelstumpf} = \pi \cdot 5e \cdot (7e + 4e)$$

$$M_{Kegelstumpf} = \pi \cdot 5e \cdot 11e$$

$$M_{Kegelstumpf} = \pi \cdot 55e^2$$

$$M_{Kegelstumpf} = 55\pi e^2$$

Berechnung des Kugelradius r_3:

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi \cdot r_3^{\,3} \qquad | : 2 \rightarrow \text{da Halbkugel}$$

$$V_{Halbkugel} = \frac{4}{3} : 2 \cdot \pi \cdot r_3^{\,3}$$

$$V_{Halbkugel} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r_3^{\,3} \qquad | \cdot 3$$

$$V_{Halbkugel} \cdot 3 = \frac{2}{\cancel{3}} \cancel{\cdot 3} \cdot \pi \cdot r_3^{\,3} \qquad | : 2$$

$$\frac{V_{Halbkugel} \cdot 3}{2} = \cancel{2 : 2} \cdot \pi \cdot r_3{}^3 \qquad | : \pi$$

$$\frac{V_{Halbkugel} \cdot 3}{2 \cdot \pi} = \cancel{\pi : \pi} \cdot r_3{}^3 \qquad | \sqrt[3]{\ }$$

$$r_3 = \sqrt[3]{\frac{V_{Halbkugel} \cdot 3}{2 \cdot \pi}} \qquad | \sqrt[3]{\ }$$

$$r_3 = \sqrt[3]{\frac{486\pi e^3 \cdot 3}{2 \cdot \pi}}$$

$$r_3 = \sqrt[3]{\frac{1.458 e^3}{2}}$$

$$r_3 = \sqrt[3]{729 e^3}$$

$$r_3 = 9e$$

Berechnung der Fläche des Kreisrings $A_{Kreisring}$:

$A_{Kreisring} = \pi \cdot (r_3{}^2 - r_2{}^2)$

$A_{Kreisring} = \pi \cdot ((9e)^2 - (4e)^2)$

$A_{Kreisring} = \pi \cdot (81e^2 - 16e^2)$

$A_{Kreisring} = \pi \cdot 65e^2$

$A_{Kreisring} = 65\pi e^2$

Berechnung der halben Kugeloberfläche $O_{Halbkugel}$:

$O_{Kugel} = 4\pi r_3{}^2 \qquad | : 2 \rightarrow$ da Halbkugel

$$O_{Halbkugel} = \frac{4\pi r_3{}^2}{2}$$

$O_{Halbkugel} = 2\pi r_3{}^2$

$O_{Halbkugel} = 2\pi (9e)^2$

$O_{Halbkugel} = 2\pi 81e^2$

$O_{Halbkugel} = 162\pi e^2$

Beweisführung für $O = 331\pi e^2$:

$O_{Körper} = A_{Kreis} + M_{Kegelstumpf} + A_{Kreisring} + O_{Halbkugel}$

$O_{Körper} = 49\pi e^2 + 55\pi e^2 + 65\pi e^2 + 162\pi e^2$

$O_{Körper} = \boldsymbol{331\pi e^2}$

Wahlbereich Aufgabe 2 (5 Punkte + 3 Punkte):

a) Vom Viereck ABDE sind bekannt:

$\overline{AB}$ = 4,9 cm

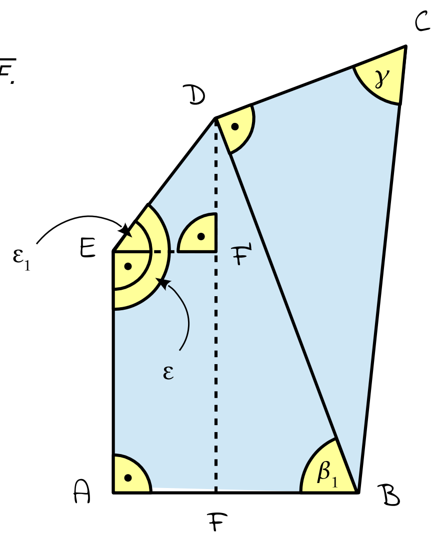
$\overline{AE}$ = 6,2 cm

$\overline{BD}$ = 7,8 cm

Winkel DBA = 73° → β_1

1. Berechne den Abstand des Punktes D von $\overline{AB}$.

→ *Berechne über den Sinus von Winkel DBA (β_1) die Länge $\overline{DF}$.*



Berechnung des Abstand des Punktes D von $\overline{AB}$:

$\sin \beta_1 = \dfrac{\overline{DF}}{\overline{BD}}$ $\quad | \cdot \overline{BD}$

$\sin \beta_1 \cdot \overline{BD} = \dfrac{\overline{DF}}{\cancel{\overline{BD}}} \cancel{\cdot \overline{BD}}$

$\overline{DF}$ = sin 73° · 7,8 cm

$\overline{DF}$ = 0,9563 · 7,8 cm

$\overline{DF}$ = **7,5 cm**

2. Wie groß ist der Winkel ε?

→ *Berechne über den Cosinus von Winkel DBA (β_1) die Länge $\overline{BF}$. Ziehe diese Länge von $\overline{AB}$ ab, um die Länge $\overline{EF}$ zu erhalten. Ziehe abschließend von der vorhin berechneten Länge $\overline{DF}$ die Länge $\overline{AE}$ ab, um die Länge $\overline{DF'}$ zu erhalten. Über den Tangens kannst du den Teilwinkel ε_1 berechnen, der mit 90° addiert den Winkel ε ergibt.*

Berechnung der Länge $\overline{BF}$:

$\cos \beta_1 = \dfrac{\overline{FB}}{\overline{BD}}$ $\quad | \cdot \overline{BD}$

$\cos \beta_1 \cdot \overline{BD} = \dfrac{\overline{FB}}{\cancel{\overline{BD}}} \cancel{\cdot \overline{BD}}$ $\quad | \cdot \overline{BD}$

$\overline{FB} = \cos \beta_1 \cdot \overline{BD}$

$\overline{FB}$ = cos 73° · 7,8 cm

$\overline{FB}$ = 2,3 cm

Berechnung der Länge $\overline{EF}$:

$\overline{EF'} = \overline{AB} - \overline{BF}$

$\overline{EF'}$ = 4,9 cm – 2,3 cm

$\overline{EF'}$ = 2,6 cm

Berechnung der Länge $\overline{DF'}$:

$\overline{DF'} = \overline{DF} - \overline{AE}$

$\overline{DF'} = 7{,}5\text{ cm} - 6{,}2\text{ cm}$

$\overline{DF'} = 1{,}3\text{ cm}$

Berechnung des Teilwinkels ε_1:

$\tan \varepsilon_1 = \dfrac{\overline{DF'}}{\overline{EF'}}$

$\tan \varepsilon_1 = \dfrac{1{,}3\text{ cm}}{2{,}6\text{ cm}}$

$\varepsilon_1 = 26{,}6°$

Berechnung des Winkels ε:

$\varepsilon = \varepsilon_1 + 90°$

$\varepsilon = 26{,}6° + 90°$

$\varepsilon = \boldsymbol{116{,}6°}$

Der Flächeninhalt des Dreiecks BCD ist halb so groß wie der Flächeninhalt des Vierecks ABDE.

3. Wie groß ist der Winkel DCB?

→ *Berechne den Flächeninhaltes des Vierecks$_{ABDE}$ bestehend aus dem Trapez$_{AFDE}$ und dem Dreieck$_{FBD}$, den du anschließend halbierst und somit den Flächeninhalt des Dreieck$_{BCD}$ erhältst. Über die Flächeninhaltsformel des Dreiecks kannst du dir die Länge $\overline{CD}$ berechnen, mit der du über den Tangens den Winkel DCB bestimmen kannst.*

Berechnung des Flächeninhaltes des Vierecks ABDE:

$A_{ABDE} = A_{Trapez\ AFDE} + A_{Dreieck\ FBD}$

$A_{ABDE} = \dfrac{\overline{AE} + \overline{DF}}{2} \cdot \overline{AF} + \dfrac{1}{2} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{DF}$

$A_{ABDE} = \dfrac{6{,}2\text{cm} + 7{,}5\text{ cm}}{2} \cdot 2{,}6\text{ cm} + \dfrac{1}{2} \cdot 2{,}3\text{ cm} \cdot 7{,}5\text{ cm}$

$A_{ABDE} = \dfrac{13{,}7\text{ cm}}{2} \cdot 2{,}6\text{ cm} + \dfrac{1}{2} \cdot 17{,}3\text{ cm}^2$

$A_{ABDE} = 6{,}9\text{ cm} \cdot 2{,}6\text{ cm} + \dfrac{1}{2} \cdot 17{,}3\text{ cm}^2$

$A_{ABDE} = 17{,}9\text{ cm}^2 + 8{,}7\text{ cm}^2$

$A_{ABDE} = 26{,}6\text{ cm}^2$

Berechnung des Flächeninhaltes des Dreiecks BCD:

$A_{BCD} = \frac{A_{ABDE}}{2}$

$A_{BCD} = \frac{26{,}6\ cm^2}{2}$

$A_{BCD} = 13{,}3\ cm^2$

Berechnung der Länge $\overline{CD}$:

$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BD} \qquad | \cdot 2$

$A_{BCD} \cdot 2 = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{BD} \qquad | : \overline{BD}$

$\frac{A_{BCD} \cdot 2}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CD} \cdot \cancel{\overline{BD}}}{\cancel{\overline{BD}}} \qquad | : \overline{BD}$

$\overline{CD} = \frac{13{,}3\ cm \cdot 2}{7{,}8\ cm}$

$\overline{CD} = \frac{26{,}6\ cm^2}{7{,}8\ cm}$

$\overline{CD} = 3{,}4\ cm$

Berechnung des Winkels DCB:

$\tan \sphericalangle BCD = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$

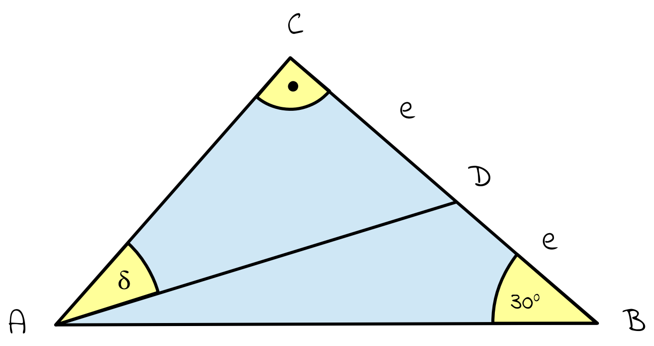
$\tan \sphericalangle BCD = \frac{7{,}8\ cm}{3{,}4\ cm}$

$\sphericalangle DCB = \mathbf{66{,}4°}$

b) Zeige ohne Verwendung gerundeter Werte, dass im nebenstehenden Dreieck ABC gilt:

$\cos \delta = \frac{2\sqrt{3}}{7}$

→ *Berechne über den Tangens δ die Länge $\overline{AC}$. Über den Pythagoras kannst du die Länge $\overline{AD}$ bestimmen. Den Beweise erbringst du mit der Cosinusfunktion im Dreieck$_{ADC}$.*



Berechnung der Länge $\overline{AC}$:

$$\tan\delta = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \qquad | \cdot \overline{BC}$$

$$\tan\delta \cdot \overline{BC} = \frac{\overline{AC}}{\cancel{\overline{BC}}} \cancel{\cdot \overline{BC}}$$

$$\overline{AC} = \tan 30° \cdot 2e$$

$$\overline{AC} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot 2e$$

$$\overline{AC} = \frac{2}{3}\sqrt{3}e$$

Berechnung der Länge $\overline{AD}$:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$$

$$\overline{AD}^2 = (\frac{2}{3}\sqrt{3}e)^2 + e^2$$

$$\overline{AD}^2 = \frac{4}{\cancel{9}^3} \cdot \cancel{3}e^2 + e^2$$

$$\overline{AD}^2 = \frac{4}{3}e^2 + \frac{3}{3}e^2$$

$$\overline{AD}^2 = \frac{7}{3}e^2 \qquad | \sqrt{\ }$$

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}e \qquad | \text{ erweitern mit } \sqrt{3}$$

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}e$$

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}e}{3}$$

Beweis für $\cos\delta = \frac{2\sqrt{3}}{7}$:

$$\cos\delta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$$

$$\cos\delta = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}e}{\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}e}{3}}$$

$$\cos\delta = \frac{2\cdot\cancel{\sqrt{3}e}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\sqrt{7}\cdot\cancel{\sqrt{3}e}}$$

$\cos\delta = \frac{2}{\sqrt{7}}$ | erweitern mit $\sqrt{7}$

$\cos\delta = \frac{2\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}$

$\cos\delta = \frac{2\cdot\sqrt{7}}{7}$

Wahlbereich Aufgabe 3 (5 Punkte + 3 Punkte):

a) Eine Parabel p_1 mit der Gleichung $y = x^2 + 2x + q$ geht durch den Punkt P $(-3|-1)$.

Eine zweite Parabel p_2 hat die Gleichung $y = -x^2$.

1. Zeichne beide Parabeln in ein Koordinatensystem ein.

→ *Bestimme zuerst den Wert q, indem du die Koordinaten des Punktes P in die Parabelgleichung einsetzt. Mit ihm kannst du nun die Parabelgleichung und den Scheitelpunkt der ersten Parabel bestimmen, um sie in ein Koordinatensystem zu zeichnen. Die zweite Normalparabel liegt im Ursprung und öffnet nach unten.*

Bestimmung der Werts q:

$y = x^2 + 2x + q$ | P $(-3|-1) \rightarrow x = -3;\ y = -1$

$-1 = (-3)^2 + 2\cdot(-3) + q$

$-1 = 9 - 6 + q$

$-1 = 3 + q$ | -3

$-1 - 3 = \cancel{3 - 3} + q$

$q = -4$

Bestimmung der Parabelgleichung p_1:

$y = x^2 + 2x + q$ | $q = -4$

$y = x^2 + 2x - 4$

Bestimmung der Scheitelform von p_1:

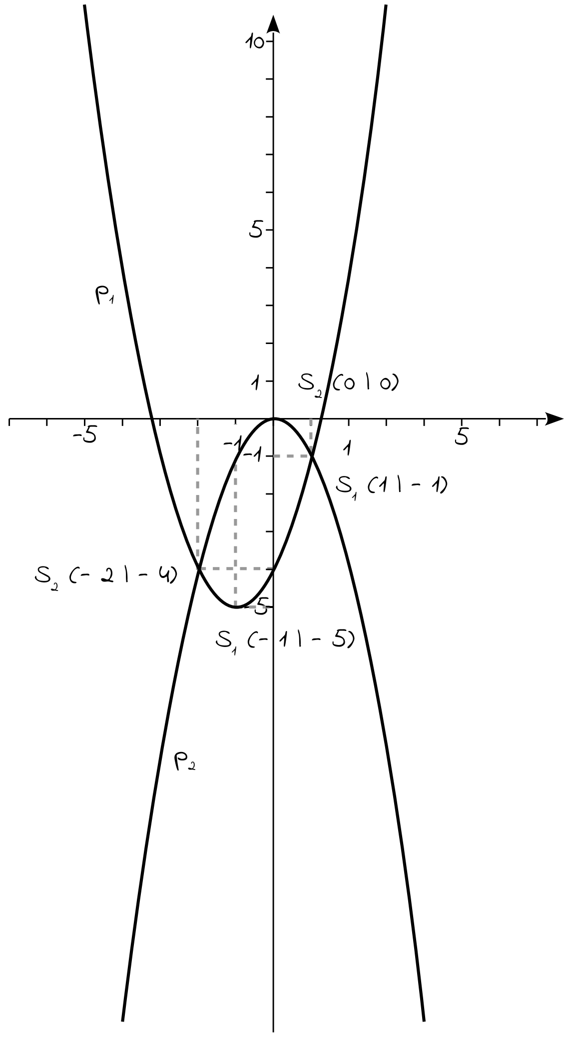
$y = x^2 + 2x - 4$ | quadratische Ergänzung mit 1

$y = x^2 + 2x + 1 - 4 - 1$

$y = (x + 1)^2 - 5$

$\rightarrow S = (-1|-5)$

Zeichnung ist im Maßstab 1:2 gehalten:



2. Berechne die Punkte der Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Parabeln.

→ *Setze beide Parabelgleichungen gleich und bestimme über die Lösungsformel die x-Koordinaten. Setze die x-Werte in die zweite Parabelgleichung ein, um die y-Koordinaten zu berechnen.*

Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte von p_1 und p_2:

p_1: $y_1 = x^2 + 2x - 4$

p_2: $y_2 = -x^2$

$y_1 = y_2$ | Gleichsetzen

$x^2 + 2x - 4 = -x^2$ | $+ x^2$

$x^2 + x^2 + 2x - 4 = \cancel{-x^2 + x^2}$

$2x^2 + 2x - 4 = 0$ | : 2

$2x^2 : 2 + 2x : 2 - 4 : 2 = 0 : 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$x_{1|2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 2}$

$x_{1|2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}}$

$x_{1|2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$

$x_{1|2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} = -2$

x_1 in p_2:

$y_2 = - x^2$ | $x = x_1 = 1$

$y_2 = - (1)^2$

$y_2 = - (+ 1)$

$y_2 = + (- 1)$

→ $\boldsymbol{S_1 = (1|-1)}$

x_2 in p_2:

$y_2 = - x^2$ | $x = x_2 = - 2$

$y_2 = - (- 2)^2$

$y_2 = - (+ 4)^2$

$y_2 = + (- 4)^2$

→ $\boldsymbol{S_2 = (-2|-4)}$

3. Bestimme rechnerisch die Gleichung der Geraden, die durch diese beiden Schnittpunkte verläuft.

→ *Bestimme den m-Wert aus der Differenz der Koordinaten der beiden Schnittpunkte. Bestimme anschließend den b-Wert mithilfe eines Schnittpunktes, um die Gleichung der Geraden zu erhalten.*

Berechnung des m-Wertes:

$m = \frac{y_{S2} - y_{S1}}{x_{S2} - x_{S1}}$ | $S_1\ (1|-1) \rightarrow x_{S1} = 1;\ y_{S1} = -1$

$m = \frac{-4-(-1)}{-2-1}$ | $S_2\ (-2|-4) \rightarrow x_{S2} = -2;\ y_{S2} = -4$

$$m = \frac{-4 + (-1)}{-3}$$

$$m = \frac{-3}{-3}$$

$m = 1$

Berechnung von b:

$y = mx + b \qquad | -mx$

$y - mx = \cancel{mx - mx} + b$

$b = y - mx \qquad | m = 1$

$b = y - 1x \qquad | S_1\,(1|-1) \rightarrow x = 1;\ y = -1$

$b = -1 - 1 \cdot 1$

$b = -2$

Bestimmung der Gleichung von Gerade g:

$y_g = mx + b \qquad | m = 1;\ b = -2$

$y_g = 1 \cdot x - 2$

$\boldsymbol{y_g = x - 2}$

b) Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Gleichung:

$$\frac{3x - 1}{3x^2 - 6x + 3} - \frac{6x - 1}{6x - 6} = \frac{-4x}{3x - 3}$$

→ *Bestimme zuerst den Hauptnenner und die Definitionsmenge. Berechne anschließend über die Lösungsformel die Werte für x aus.*

Bestimmung des Hauptnenners:

Nenner 1: $3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1)$	$\rightarrow 3(x-1)^2$
Nenner 2: $6x - 6$	$\rightarrow 6(x-1)$
Nenner 3: $3x - 3$	$\rightarrow 3(x-1)$
Hauptnenner:	$\rightarrow 6(x-1)^2$

Bestimmung der Definitionsmenge:

$(x - 1) = 0$

$x - 1 = 0 \qquad | +1$

$x = 1$

$\rightarrow \boldsymbol{D = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$

Bestimmung der Werte für x:

$$\frac{3x-1}{3x^2-6x+3} - \frac{6x-1}{6x-6} = \frac{-4x}{3x-3} \qquad | \cdot \text{HN} = 6(x-1)^2$$

$$\frac{3x-1}{3(x-1)^2} - \frac{6x-1}{6(x-1)} = \frac{-4x}{3(x-1)}$$

$$\frac{3x-1 \cdot \cancel{6}^2\cancel{(x-1)^2}}{\cancel{3(x-1)^2}} - \frac{6x-1 \cdot \cancel{6}(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{6(x-1)}} = \frac{-4x \cdot \cancel{6}^2(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{3(x-1)}}$$

$$2(3x-1) - (6x-1)(x-1) = -4x \cdot 2 \cdot (x-1)$$

$$6x - 2 - (6x^2 - 6x - x + 1) = -8x \cdot (x-1)$$

$$6x - 2 + (-6x^2 + 6x + x - 1) = -8x^2 + 8x \qquad | +8x^2$$

$$6x - 2 - 6x^2 + 6x + x - 1 + 8x^2 = \cancel{-8x^2 + 8x^2} + 8x \qquad | -8x$$

$$6x - 2 - 6x^2 + 6x + x - 1 + 8x^2 - 8x = \cancel{8x - 8x}$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \qquad | :2$$

$$2x^2 : 2 + 5x : 2 - 3 : 2 = 0$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{1/2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}}$$

$$x_{1/2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{24}{16}}$$

$$x_{1/2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}}$$

$$x_{1/2} = -\frac{5}{4} \pm \frac{7}{4}$$

$$x_1 = -\frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{5}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{12}{4} = -3$$

$$\rightarrow \mathbb{L} = \left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$$